

Musterlösung 8

1. a) Es muss

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c \frac{\lambda^n}{n!} = c \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) = c(e^\lambda - 1)$$

gelten, also

$$c = \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

b) Es ist

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n P[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = c\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = c\lambda e^\lambda = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

und

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} nc \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + E[X] = c\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + E[X] \\ &= c\lambda^2 e^\lambda + c\lambda e^\lambda = \frac{e^\lambda \lambda(\lambda + 1)}{e^\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{e^\lambda \lambda(e^\lambda - \lambda - 1)}{(e^\lambda - 1)^2}.$$

Bitte wenden!

c)

$$(A) \quad P[X = Y \mid Y = n] = \frac{P[X = Y = n]}{P[Y = n]} = \frac{P[X = n, Y = n]}{P[Y = n]}$$

$$\stackrel{\text{unabh.}}{=} \frac{P[X = n] \cdot P[Y = n]}{P[Y = n]} = P[X = n],$$

$$(B) \quad P[0 \neq Y = n] = P[Y = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \neq P[X = n], \quad (\text{da } c \neq e^{-\lambda})$$

$$(C) \quad P[Y = n \mid Y \neq 0] = \frac{P[0 \neq Y = n]}{P[Y \neq 0]} = \frac{P[Y = n]}{1 - P[Y = 0]}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!(1 - e^{-\lambda})} = c \frac{\lambda^n}{n!} = P[X = n],$$

$$(D) \quad P[Y \neq 0 \mid Y = n] = \frac{P[0 \neq Y = n]}{P[Y = n]} = \frac{P[Y = n]}{P[Y = n]} = 1 \neq P[X = n],$$

$$(E) \quad P[X = n \mid Y = 0] = \frac{P[X = n, Y = 0]}{P[Y = 0]} \stackrel{\text{unabh.}}{=} \frac{P[X = n] \cdot P[Y = 0]}{P[Y = 0]} = P[X = n].$$

Also sind (A),(C) und (E) gleich $P[X = n]$, (B) und (D) hingegen nicht.

2. a) X_n kann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die n -te Ente vom ℓ -ten Jäger *nicht* getroffen wird, ist $1 - p/m$. Da die Jäger unabhängig voneinander schießen, beträgt für die n -te, und deswegen für jede Ente die Chance, unverletzt davonzukommen,

$$P[X_n = 1] = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k. \quad (1)$$

Also sind alle X_n Binomial-verteilt mit Parametern $\tilde{n} = 1$ und $\tilde{p} = (1 - p/m)^k$, also Bernoulli verteilt mit Parameter \tilde{p} .

- b) Die Gesamtzahl X aller nicht verletzten Enten ist gleich $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_m]. \quad (2)$$

Da die X_n Indikatorvariablen sind, gilt $E[X_n] = P[X_n = 1] = (1 - p/m)^k$ für alle $n = 1, \dots, m$ und somit

$$E[X] = m \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

- c) Wir betrachten nur den Fall $k < m$, also weniger Jäger als Enten. Dann sind X_1, \dots, X_m **nicht** unabhängig, weil

$$P[X_1 = \dots = X_m = 0] = 0 < \left(1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k\right)^m = \prod_{n=1}^m P[X_n = 0].$$

Bemerkung: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_m sind auch **nicht** unabhängig, wenn $k \geq m$ und $m > 1$. Insbesondere ist X nicht Binomial-verteilt.

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

a) Für $0 \leq k \leq N$, $0 \leq n - k \leq M$ gilt

$$P[X = k] = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

Für alle übrigen k ist $P[X = k] = 0$.

b) Wir nummerieren die weissen Kugeln von 1 bis N . Dann können wir X als Summe von Indikatorfunktionen schreiben:

$$X = X_1 + \dots + X_N,$$

wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{die weisse Kugel Nr. } i \text{ wird gezogen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$E[X_i] = P[X_i = 1] = \frac{1 \cdot \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{n}{M+N}.$$

Es folgt

$$E[X] = \frac{Nn}{M+N}.$$